

## Zadania domowe: Seria 10

**Zadanie 10.1.** (Równanie ciągłości prądu prawdopodobieństwa w polu elektromagnetycznym (7.1(100)))

Hamiltonian cząstki bezspinowej o masie  $m$  i ładunku  $q$  w polu elektromagnetycznym opisywanym potencjałami  $(\vec{A}, \phi)$  ma postać

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{i\hbar q}{2m} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 + q\phi$$

Udowodnić, że gęstość prawdopodobieństwa  $\rho = \psi\psi^*$  i gęstość prądu prawdopodobieństwa spełniają równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad \text{gdzie} \quad \vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q}{m} \vec{A} \psi \psi^*$$

**Uwaga.** Rozwiązanie zadania można znaleźć w skrypcie.

**Zadanie 10.2.** (Niezmienność gęstości i prądu prawdopodobieństwa przy transformacji cechowania (7.2(101)))

Transformacja cechowania potencjałów polega na dokonaniu zamian

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi(\vec{r}, t), \quad \phi \longrightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t)$$

Wykazać, że gęstość i prąd prawdopodobieństwa są niezmiennicze względem transformacji cechowania potencjałów jeśli wraz ze zmianą potencjałów dokonujemy zmiany (cechowania) funkcji falowej

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \chi(\vec{r}, t) \right]$$

gdzie  $\psi = \psi(\vec{r})$  jest funkcją falową badanej cząstki.

**Uwaga.** Rozwiązanie zadania można znaleźć w skrypcie.

**Zadanie 10.3.** (Niezmienność r. Schrödingera przy transformacji cechowania (7.3(102)))

Rozważając hamiltonian

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p} + \frac{i\hbar q}{2m} \operatorname{div} \vec{A} + \frac{q^2}{2m} \vec{A}^2 + q\phi$$

dokonać jego transformacji wynikającej z transformacji cechowania potencjałów według wzorów

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi(\vec{r}, t), \quad \phi \longrightarrow \phi' = \phi + \frac{\partial}{\partial t} \chi(\vec{r}, t)$$

Sprawdzić, że równanie Schrödingera dla nowego hamiltonianu i dla nowej funkcji falowej

$$\psi \longrightarrow \psi' = \exp \left[ i \frac{q}{\hbar} \chi(\vec{r}, t) \right]$$

redukuje się do postaci sprzed cechowania. Fakt ten oznacza, że równanie Schrödingera jest niezmiennicze względem transformacji cechowania potencjałów.

**Uwaga.** Rozwiązanie zadania można znaleźć w skrypcie.

**Zadanie 10.4.** (Cząstka swobodna w stałym polu  $\vec{B}$ . Poziomy Landau'a. (7.4(103))

Zbadać funkcje falowe i poziomy energetyczne swobodnej cząstki o masie  $m$  i ładunku  $q$  poruszającej się w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $\vec{B} = (0, 0, B)$ .

**Wskazówka.** Wybrać potencjał wektorowy w postaci  $\vec{A} = (-yB, 0, 0)$ . Trzeba jednak (krótko) omówić taki wybór.

---

\* \* \* \* \*