Zadania domowe: Seria 6

Zadanie 6.1. (Superpozycja stanów oscylatora (4.1 (68))
Oscylator harmoniczny jest opisany hamiltonianem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

a jego (unormowane) funkcje własne oznaczamy przez $\psi_n(x)$. W chwili początkowej funkcja falowa oscylatora była dana wzorem

$$\psi(x, t=0) = \cos\theta\, \psi_0(x) + \sin\theta\, \psi_1(x) \qquad \text{gdzie} \quad \theta \in (0,\, \pi).$$

A.) Znaleźć funkcję falową oscylatora dla późniejszych chwil czasu $t > 0$.
B.) Obliczyć wartości oczekiwane energii $\langle E \rangle$, $\langle E^2 \rangle$, oraz dyspersję $\sigma^2(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$.
C.) Zbadać zależność od czasu wartości oczekiwanej $\langle x \rangle_t$.

Wskazówka. Element macierzowy operatora położenia $\hat{x}$ dany jest wzorem

$$\langle \psi_k \,|\, \hat{x} \,|\, \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\sqrt{n+1}\, \delta_{k,n+1} + \sqrt{n}\, \delta_{k,n-1} \right).$$

Zadanie 6.2. (Potencjał jednowymiarowy$V(x) = V_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$ (1.2(B.2))
Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowym polu o energii potencjalnej

$$V(x) = V_0(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

gdzie V_0 oraz α to rzeczywiste stałe dodatnie.

A.) Przedyskutować przebieg funkcji $V(x)$ i sporządzić jej wykres.
B.) Wybierając nową zmienną $y = e^{-\alpha x}$ skonstruować odpowiednie (stacjonarne) równanie Schrödingera

$$y^2 \frac{d^2\psi(y)}{dy^2} + y \frac{d\,\psi(y)}{dy} - \beta^2(y^2 - 2y)\psi(y) + \mathcal{E}\psi(y) = 0,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\beta = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \qquad \text{oraz} \qquad \mathcal{E} = \frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2}.$$

C.) Przedyskutować zachowanie asymptotyczne. Pokazać, że dla $y \to \infty$ funkcja falowa zachowuje się jak $\psi(y) \approx e^{-\beta y}$. Natomiast dla $y \to 0$ mamy $\psi(y) \approx y^{\pm\sqrt{-\mathcal{E}}}$,
D.) Ograniczyć analizę do stanów związanych, dla których energia cząstki $E < 0$. Wówczas $\mathcal{E} = -\lambda^2$, przy czym $\lambda = \sqrt{2m|E|/(\hbar^2\alpha^2)}$.
E.) Szukać rozwiązania równania Schrödingera w postaci $\psi(y) = y^\lambda\, e^{-\beta y}\, f(y)$. (Czemu odrzucamy rozwiązanie proporcjonalne do $y^{-\lambda}$?).

F.) Zbudować równanie dla funkcji $f(y)$

$$y^2\,\frac{d^2 f(y)}{dy^2} \;+\; \Big[(2\lambda+1)y - 2\beta y^2\Big]\,\frac{d\,f(y)}{dy} \;+\; 2\beta y\Big(\beta - \frac{1}{2} - \lambda\Big) f(y) \;=\; 0,$$

Szukać jego rozwiązania za pomocą rozwinięcia w szereg. Prowadzi to do warunku rekurencyjnego

$$a_{n+1} \;=\; 2\beta \frac{n+\lambda+\frac{1}{2}-\beta}{(n+1)(2\lambda+n+1)}\,a_n$$

Jak wyznaczymy stałą a_0.

G.) Przedyskutować konieczność urywania się szeregu. Z warunku na urywanie się szeregu

$$n+\lambda-\beta+\frac{1}{2}=0, \quad \text{gdzie} \;\; n\in\mathbb{N},$$

otrzymać warunek istnienia stanów związanych. Przedyskutować liczbę stanów związanych mogących istnieć w badanej jamie potencjału.

H.) Z warunku na urywanie się szeregu otrzymać warunek kwantowania energii

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\left[\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \;-\; \left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2$$

I.) Wracając do zmiennej x wypisać i omówić funkcje falowe.

Zadanie 6.3. (Potencjał jednowymiarowy$V(x) = V_0\big(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\big)$ (1.2(B.2))
W poprzednim zadaniu założyć, że w studni potencjalnej jest bardzo wiele poziomów związanych, to znaczy spełniony jest warunek

$$\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2\alpha^2}} \;\gg\; 1.$$

Przedyskutować (w przybliżeniu) energie kilku najniżej położonych stanów, to jest stanów dla których liczba kwantowa n jest niewiele większa od jedności. Zestawić uzyskane wyniki z rezultatami dotyczącymi oscylatora harmonicznego.

Zadanie 6.4. (Oscylator harmoniczny)
Znaleźć energie własne i odpowiednie funkcje własne dla standardowego kwantowo–mechanicznego oscylatora harmonicznego. Posłużyć się metodą konfluentnego równania hipergeometrycznego. Metoda ta jest przedstawiona w skrypcie, więc nie powinna sprawiać trudności.

Zadanie 6.5. (Pewne własności wielomianów Hermite'a)
Wielomiany Hermite'a definiujemy za pomocą wzoru Rodriguesa lub poprzez funkcję tworzącą

$$H_n(x) \;=\; (-1)^n\, e^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2} \qquad \text{lub} \qquad e^{-s^2+2sx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\,H_n(x).$$

Korzystając z tych zależności udowodnić następujące relacje rekurencyjne

A. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \dfrac{d}{dx}\,H_n(x).$

B. $\dfrac{d}{dx}\,H_n(x) \;=\; 2nH_{n-1}(x).$

C. $H_{n+1}(x) \;=\; 2xH_n(x) \;-\; 2nH_{n-1}(x).$

---

* *