Zadania domowe: Seria 5

Zadanie 5.1. (Cząstka w nieskończonej, symetrycznej jamie potencjału (3.3(57))
Jednowymiarowa, nieskończenie głęboka studnia potencjału mieści się w przedziale $x \in (-a, +a)$. W jamie tej znajduje się cząstka o masie m w stanie opisanym funkcją falową, którą modelujemy w następujący sposób

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} & \text{dla} \quad -a < x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad 0 < x < a \end{cases}$$

Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania, w wyniku pomiaru, energii o wartości wynoszącej $E_n = (n^2\hbar^2\pi^2)/(8ma^2)$. Otrzymany wynik przedyskutować. W jamie takiej mamy dwa typy unormowanych funkcji falowych

$$\text{dla} \;\; \text{n} = 2\text{k} - 1 \qquad \psi_{2k-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2k-1)}{2a}\,\pi x\right)$$

$$\text{dla} \;\; \text{n} = 2\text{k} \qquad \psi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2k}{2a}\,\pi x\right)$$

Zadanie 5.2. (Transmisja i odbicie na skończonym skoku potencjału (3.12(66)))
A.) Niech cząstce o masie m odpowiada fala płaska: $\psi(x) = Ae^{ikx}$. Obliczyć i przedyskutować prąd prawdopodobieństwa odpowiadający tej cząstce.
B.) Cząstka o masie m porusza się w jednowymiarowym polu o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ V_0 & \text{dla} \quad x > 0 \quad (\, V_0 > 0\,). \end{cases}$$

Załóżmy, że energia cząstki jest większa niż skok potencjału, tzn. $E > V_0$. Cząstka porusza się z lewa na prawo (tj. od ujemnych, w kierunku dodatnich x-ó). Przedyskutować funkcje falową cząstki.
C.) Jakie jest prawdopodobieństwo przejścia cząstki przez barierę (współczynnik przejścia), a jakie prawdopodobieństwo (współczynnik) odbicia.

Zadanie 5.3. Pakiet falowy minimalizujący zasadę nieoznaczoności (3.13(67))
Rozważamy jednowymiarowy pakiet falowy minimalizujący zasadę nieoznaczoności w pewnej chwili czasu (dlatego nie zaznaczamy wyraźnie zależności od czasu):

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{\hbar|\lambda|}} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\hbar|\lambda|} + \frac{ib}{\hbar}\,(x-a)\right]$$

A.) Przeprowadzić normowanie (wyznaczyć stałą A).
B.) Obliczyć średnie położenie $\langle\, \hat{x}\,\rangle$.
C.) Obliczyć średni kwadrat położenia $\langle\, \hat{x}^2\,\rangle$.
D.) Obliczyć średni pęd $\langle\, \hat{p}\,\rangle$.
E.) Obliczyć średni kwadrat pędu $\langle\, \hat{p}^2\,\rangle$.
F.) Skonstruować dyspersje $\sigma^2(x)$ oraz $\sigma^2(p)$. Przekonać się, że zasada nieoznaczoności jest rzeczywiście minimalizowana.

Odp. $A = (\hbar|\lambda|/\pi)^{1/4}$. $\langle\, \hat{x}\, \rangle = a$. $\langle\, \hat{p}\, \rangle = b$. $\langle\, \hat{x}^2\, \rangle = \frac{\hbar|\lambda|}{2} + a^2$. $\langle\, \hat{p}^2\, \rangle = \frac{\hbar}{2|\lambda|} + b^2$.

Zadanie 5.4. *("Połówka" potencjału oscylator (4.5(72))
Znaleźć poziomy energetyczne i funkcje falowe cząstki o masie m w polu o energii potencjalnej

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Potencjał ten (a ściślej energię potencjalną) można by nazwać "połówką" potencjału kwantowo--mechanicznego oscylatora harmonicznego.

Zadanie 5.5. (Efekt Starka dla jednowymiarowego oscylatora (4.3(70))
Znaleźć i przedyskutować funkcje falowe i poziomy energetyczne dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego o masie m i częstości ω. Cząstka oscylatora ma ładunek elektryczny q i znajduje się w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu E_0. Przyjąć potencjał pola elektrycznego w postaci $\varphi = -E_0 x$. Jest to tzw. efekt Starka dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego.

Zadanie 5.6. (Elementy macierzowe $\hat{x}^2$ oraz $\hat{p}^2$ dla oscylatora harmonicznego (B.4))
Rozważamy kwantowo-mechaniczny (jednowymiarowy) oscylator harmoniczny. W czasie ćwiczeń podano, że element macierzowy kwadratu operatora położenia ma postać

$$\langle\, k \,|\, \hat{x}^2 \,|\, n \,\rangle \;=\; \frac{\hbar}{m\omega}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\,\delta_{k,\,n} \;+\; \sqrt{\frac{n(n-1)}{4}}\,\delta_{k,\,n-2} \;+\; \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{4}}\,\delta_{k,\,n+2}\right],$$

zaś element macierzowy kwadratu operatora pędu to

$$\langle\, k \,|\, \hat{p}^2 \,|\, n \,\rangle = m\omega\hbar\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\,\delta_{k,\,n} \;-\; \sqrt{\frac{n(n-1)}{4}}\,\delta_{k,\,n-2} \;-\; \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{4}}\,\delta_{k,\,n+2}\right]$$

Przeprowadzić pełne rachunki prowadzące do powyższych rezultatów.

Zadanie 5.7. (Wartości oczekiwane i dyspersja energii dla stanu superponowanego (B.5))
Niech funkcje falowe $\varphi_1(\vec{\mathbf{r}})$ oraz $\varphi_2(\vec{\mathbf{r}})$ będą funkcjami własnymi hamiltonianu pewnego układu fizycznego

$$\hat{H}\varphi_k(\vec{\mathbf{r}}) \;=\; E_k\,\varphi_k(\vec{\mathbf{r}}), \qquad k = 1, 2, \qquad E_1 \neq E_2.$$

Funkcje te są ortonormalne, tj. $\langle\, \varphi_j \,|\, \varphi_k \,\rangle = \delta_{jk}$. Niech teraz funkcja falowa opisująca stan układu będzie superpozycją

$$\psi(\vec{\mathbf{r}}, t) \;=\; \beta_1\, e^{-i\omega_1 t}\,\varphi_1(\vec{\mathbf{r}}) \;+\; \beta_2\, e^{-i\omega_2 t}\,\varphi_2(\vec{\mathbf{r}}),$$

gdzie $\omega_k = E_k/\hbar$, zaś (w ogólności zespolone) współczynniki spełniają warunek $|\beta_1|^2 + |\beta_2|^2 = 1$.

A.) Zbadać i przedyskutować normowanie funkcji falowej $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$.

B.) Jakie wyniki będą dawać pojedyncze pomiary energii układu, jeśli jest on przygotowany w stanie opisywanym przez funkcję falową $\psi(\vec{\mathbf{r}}, t)$.

C.) Obliczyć $\langle\, E \,\rangle$ – wartość oczekiwaną energii uzyskaną w długiej serii pomiarów.

D.) Obliczyć $\sigma^2(E)$ – odpowiednią dyspersję energii.

E.) Kiedy dyspersja $\sigma^2(E) = 0$?

---

* *