Zadania domowe: Seria 4

Zadanie 4.1. (Prąd prawdopodobieństwa i wartość oczekiwana pędu)(2.5(49))
Kwantowo-mechaniczną gęstość prądu prawdopodobieństwa

$$\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}) \;=\; \frac{\hbar}{2mi}\Big(\,\psi^*(\vec{\mathbf{r}})\,\boldsymbol{\nabla}\psi(\vec{\mathbf{r}}) \;-\; \psi(\vec{\mathbf{r}})\,\boldsymbol{\nabla}\psi^*(\vec{\mathbf{r}})\,\Big),$$

po pomnożeniu przez m – masę cząstki, można uważać za gęstość pędu niesionego przez cząstkę (gęstość pędu pola schrödingerowskiego). Wykazać, że wartość oczekiwana pędu cząstki opisywanej funkcją falową $\psi(\vec{\mathbf{r}})$ wynosi

$$\langle\,\vec{\mathbf{p}}\,\rangle \;=\; m\int d^3r\;\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}).$$

Zadanie 4.2. (Analiza funkcji falowej)(3.1(55))
W pewnej chwili czasu cząstka swobodna jest opisana funkcją falową

$$\psi(x) = A\exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ik_o x\right)$$

A.) Wyznaczyć współczynnik A.
B.) Wyznaczyć obszar, w którym zlokalizowana jest cząstka.
C.) Znaleźć gęstość prądu prawdopodobieństwa. (w danej chwili czasu).
D.) Obliczyć średnie położenie i średni pęd cząstki.

Zadanie 4.3. (Cząstka w nieskończonej, symetrycznej studni potencjału)(3.2(56))
Część pierwsza zadania dotyczy metod matematycznych, a druga mechaniki kwantowej.

A.) Udowodnić, że następujące całki nieoznaczone wyrażają się wzorami

$$\int dx\;\sin ax\sin bx \;=\; \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} \;-\; \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)},$$

$$\int dx\;\cos ax\cos bx \;=\; \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} \;+\; \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)},$$

$$\int dx\;\sin ax\cos bx \;=\; -\,\frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} \;-\; \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}.$$

Zbadać przypadek gdy $a \to b$. Wyniki porównać z elementarnymi całkami z kwadratów funkcji trygonometrycznych.

B.) Za pomocą powyższych całek przedyskutować ortogonalność funkcji własnych energii dla cząstki poruszającej się w nieskończonej (jednowymiarowej) studni potencjału

$$V(x) \;=\; \begin{cases} +\infty, & |x| \geqslant a, \\ 0, & |x| < a. \end{cases}$$

Zadanie 4.4. (Cząstka w nieskończonej, symetrycznej studni potencjału)(3.4(58))
W nieskończonej, symetrycznej jamie potencjału znajduje się cząstka w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) \;=\; \sqrt{\frac{4}{3a}}\;\sin^2\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$$

Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania, w wyniku pomiaru, energii o wartości równej energii stanu podstawowego w jamie. Wykorzystać funkcje znalezione w trakcie ćwiczeń.

Zadanie 4.5. (Cząstka w skończonej, symetrycznej studni potencjału)(QM.23.4.2)
Cząstka o masie m znajduje się w symetrycznej, skończonej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \; x < -a \text{ i } x > a, \\ -V_0 & \text{dla } \; -a < x < a. \end{cases}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki wewnątrz studni. Wykorzystać funkcje znalezione w trakcie ćwiczeń.

Zadanie 4.6. (Cząstka w nieskończonej, symetrycznej studni potencjału)(3.5(59))
W nieskończenie głębokiej, symetrycznej studni potencjału znajduje się cząstka w stanie opisanym modelową funkcją falową

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2a}}\left(\frac{a+x}{a}\right) & \text{dla } \; -a < x < 0, \\ \sqrt{\frac{3}{2a}}\left(\frac{a-x}{a}\right) & \text{dla } \; 0 < x < a, \\ 0 \quad \text{inne } x. \end{cases}$$

A.) Sporządzić wykres tej funkcji falowej. Czy jest to "dobra" funkcja falowa (tzn. spełnia wszelkie warunki jakie powinna, na to aby być funkcją falową) ?
Czy to tylko model "dobrej" funkcji falowej ?

B.) Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania, w wyniku pomiaru, wartości energii

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}.$$

Uwaga. Wziąć znane już z poprzednich zadań funkcje falowe.

Zadanie 4.7. (Cząstka w niesymetrycznej nieskończonej jamie)(3.6(60))
Cząstka o masie m znajduje się w polu sił (jednowymiarowym) o potencjale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \; 0 < x < a, \\ \infty & \text{pozostałe } x. \end{cases}$$

W pewnej chwili czasu funkcja falowa cząstki dana jest wzorem

$$\psi(x) \;=\; \begin{cases} Ax(x-a) & \text{dla } \; 0 < x < a, \\ 0 & \text{pozostałe } x. \end{cases}$$

A.) Unormować funkcję $\psi(x)$.

B.) Rozwiązać stacjonarne równanie Schrödingera, tj. znaleźć wartości własne hamiltonianu (dozwolone poziomy energetyczne) oraz odpowiednie funkcje falowe (funkcje własne energii).

C.) Wyznaczyć prawdopodobieństwo $P_n$tego, że w wyniku pomiaru energii cząstki (której stan opisuje funkcja $\psi(x)$) otrzymamy E_n – jedną z dozwolonych energii (wartości własnych energii).

D.) Oszacować prawdopodobieństwo P_1. Skorzystać z informacji we wskazówkach, a nie z kalkulatora. Następnie porównać uzyskany wynik z obliczeniami na kalkulatorze.

E.) Dla podanego stanu $\psi(x)$ znaleźć wartość oczekiwaną energii $\langle E \rangle$.

Wskazówka.

1. Logarytmy naturalne do oszacowań

$$\ln 2 = 0.693147, \qquad \ln 3 = 1.098612, \qquad \ln 5 = 1.609438, \qquad \ln \pi = 1.144730,$$

2. Rozwinięcie w szereg logarytmu naturalnego

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1.$$

3. *Mathematica* w obliczeniach symbolicznych podaje

$$\sum_{k=1} \infty \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \qquad \sum_{k=1} \infty \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Zadanie 4.8. (Cząstka w niesymetrycznej nieskończonej jamie)(3.7(61))
Cząstka o masie m znajduje się w (jednowymiarowym) polu sił o potencjale (energii potencjalnej)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad 0 < x < a \\ \infty & \text{dla} \quad x < 0 \ \text{ i } \ x > a \end{cases}$$

W chwili początkowej $t = 0$ funkcja falowa cząstki dana jest wzorem

$$\psi(x, t=0) = \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{5a}} \sin^3\left(\dfrac{\pi x}{a}\right) & \text{dla} \quad 0 < x < a \\ 0 & \text{dla} \quad x < 0 \ \text{ i } \ x > a \end{cases}$$

A.) Znaleźć poziomy energetyczne cząstki w jamie potencjału (energie i funkcje falowe).

B.) Znaleźć funkcję falową $\psi(x,t)$ dla czasu $t > 0$. Wynik uzasadnić. W szczególności obliczyć okres zmian $\psi(x,t)$ w czasie.

C.) Znaleźć (w funkcji czasu) prawdopodobieństwo wystąpienia stanów o określonej energii.

D.) Obliczyć średnią energię cząstki.

Wskazówki.

$$4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - \sin 3\alpha$$

---

* *